数理解析研究所講究録
485巻 1983年 1-22

擬有理的なインパルス応答とその実現

京大工学部　山本　裕 (Yutaka Yamamoto)

§1. はじめに

Γを$[0,\infty)$上で局所的にL^2な関数の全体、すなわち$L^2_{loc}[0,\infty)$とする．[以下では関数は全て実数値をとるものとする.] 今、Γの任意の元Aに対し,

$$(1.1)\quad f_A(\omega)(t) := \int_{-\infty}^{0} A(t-\tau)\omega(\tau)d\tau \quad , \quad t \geq 0$$

と定義する．ただし、ωは$(-\infty,0]$にコンパクトな台を持ちL^2に属する関数である．すなわち、ωの属する空間は$\Omega := \bigcup_{n>0} L^2[-n,0]$である．明らかに、任意の$\omega$について$f_A(\omega) \in \Gamma$である.

さて，f_Aの像，すなわち$f_A(\Omega)$のΓにおける閉包を$\overline{\mathrm{im}\, f_A}$と書く．この$\overline{\mathrm{im}\, f_A}$の簡単な表現を求めるのが，本稿のテーマである.

問題の背景を説明しよう．(1.1)式で与えたf_Aは、一

般に特性が時間的に定常かつ線形な系の入出力関係を表わしていると考えられる（[3]，[8] 参照.）:

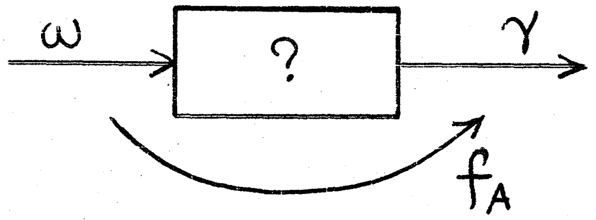

Fig. 1.

Ωの元ωが過去に於て系に入力として加えられ、その結果系にその履歴が何らかの形で（状態（state）として）蓄えられ、その状態に依存して$f_A(\omega)$という出力が未来（$[0,\infty)$）において観測されると考えられる[1]. この考え方はシステム理論、オートマトン理論で常識的であり、今問題となるのは"何らかの形で蓄えられ"というそのメカニズムを明らかにすることである. システム理論ではこれを実現理論（realization theory）と呼んでいる.

抽象的な段階では、f_Aのモデル（又は実現 — realization）の作り方はすでに知られている. まずそれを述べよう.
最初に $f_A : \Omega \to \Gamma$ は連続線形写像であることに注意する. ただしここで Γ の位相は次の可算セミノルム系

$$\|\gamma\|_{[0,n]} = \left\{\int_0^n |\gamma(t)|^2 dt\right\}^{1/2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

で与えられ、これによって Γ は Frechet空間となる. また

1) Aはインパルス応答，f_Aは入出力写像，Aのラプラス変換（存在すれば）は伝達関数（transfer function）と呼ばれている.

Ω には空間列 $\{L^2[-n,0]\}_{n=1}^{\infty}$ の帰納極限位相を入れるが、以下ではその必要性は表面には出ないので、ここでは深く立ち入らない。

Γ の元を左へ t だけ移動するシフト作用素を σ_t と書く:

(1.2) $\quad (\sigma_t \gamma)(\tau) := \gamma(\tau+t)\ ,\quad \tau, t \geq 0.$

$\{\sigma_t\}_{t\geq 0}$ は Γ の強連続な半群をなし、その無限小生成作用素は微分作用素 d/dt である。(ただし、その定義域は局所的にソボレフ空間 W_2^1 と一致する空間 $W_{2,loc}^1[0,\infty)$ である。)

さて $X_A := \overline{\mathrm{im}\, f_A}$ とおき (X_A は言うまでもなく Fréchet 空間である), X_A を状態空間とする次のようなシステム Σ_A を考えよう。(X_A が σ_t- 不変な Γ の部分空間であることに注意。)

(1.3) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\gamma_t(\tau) = \dfrac{\partial}{\partial\tau}\gamma_t(\tau) + Gu(t)\ , \quad \gamma_t(\cdot) \in X_A, \\ \text{ただし } G := A \in X_A, \\ y(t) = H\gamma_t := \gamma_t(0). \end{cases}$$

各時刻 t に於て $\gamma_t(\tau)$ は τ の関数として X_A の元である。$G = A$ が $\overline{\mathrm{im}\, f_A}$ に入っていることは, Dirac の δ に近ずく Ω の関数列 ω_n をとることによりわかる。又, H は一般に X_A 全体で well-defined ではないが、その意味の正当化についてここでは立ち入らないことにする。とにかく、一応

形式的には(1.3)の微分方程式は次の"解"を持つ:

$$(1.4) \qquad \gamma_t = \sigma_t \gamma_0 + \int_0^t \sigma_{t-\tau} A u(\tau) d\tau .$$

初期状態 $\gamma_0 = 0$ と仮定し、両辺にHを作用させ、uの台が$[0,t]$に含まれることを考慮すれば、この系 Σ_A の入出力関係: $u \mapsto y$ が(1.1)と(少くとも形式的には)同一であることがわかる(詳しくは[9]を参照されたい)。さらに Σ_A は準可到達(可到達集合が X_A で dense)かつ位相的に可観測(出力 γ. から初期値が連続的に決定できる)である。この意味で Σ_A はAの正準実現(canonical realization)である。このような正準実現が同型を除いて一意的に決まることも知られている([8])。

以上の構成法はオートマトン理論における Nerode equivalence を拡張したものであり、最も標準的なものといえる。しかしながら、問題はシステム Σ_A ((1.3))の具体的な表現を求めるのが一般にはなはだ困難である点にある。[言いかえればこの問題は十分深く研究されてこなかった。] そのために無限次元系の実現理論は抽象的にすぎ、役に立たない等と非難されたこともあったのである。

最大の問題は X_A の具体的な表現を求めることにあることは明らかであろう。そこで冒頭に説明した問題に戻る訳である。

現在までのところ、これが解けているのは $\dim \Sigma_A$ が有限な場合に限られている。それも連続時間系の問題を離散時間系に直して間接的に解くのである。しかもそこで使われている手法は Σ_A の有限次元性に強く依存していたので、それが無限次元の系に拡張され得るとは信じられていなかったのである。次節では後の拡張を考慮して、$\dim \Sigma_A$ が有限な場合に Σ_A を直接に計算することを試みる。

§2. $\overline{\mathrm{im}\, f_A}$ が有限次元の場合

先に述べた様に、これは古典的によく知られている場合である。$\overline{\mathrm{im}\, f_A}$ が有限次元になるための必要十分条件は

(i) Aのラプラス変換 $\mathcal{L}[A](s)$ が s の有理関数であり、

(ii) しかもそれが真に proper，すなわち分母の次数が分子の次数より大

であることである（[3] 参照）。

次の例題を考えよう。

(2.1) 例

(2.2) $$f(\omega)(t) = \int_{-\infty}^{0} \sin(t-\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau$$

とする。積分記号下で2回微分すると

(2.3) $$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right) f(\omega)(t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

を得る．従って $\gamma \in \operatorname{im} f \Rightarrow (d^2/dt^2+1)\gamma \equiv 0$.
逆に $(d^2/dt^2+1)\gamma \equiv 0$ ならば $\gamma = x_1 \sin t + x_2 \cos t$ と書ける．任意の ω について

$$f(\omega)(t) = \left\{\int_{-\infty}^{0} \cos\tau\, \omega(\tau)d\tau\right\}\sin t - \left\{\int_{-\infty}^{0} \sin\tau\, \omega(\tau)d\tau\right\}\cos t$$

であるから，適当な ω について $\gamma = f(\omega)$ となることがわかる．したがって

$$(2.4)\quad \operatorname{im} f = \left\{\gamma \in \Gamma : \left(\frac{d^2}{dt^2}+1\right)\gamma(t) = 0,\ \forall t \geq 0\right\}.$$

$\dim \operatorname{im} f = 2 < \infty$ であるから勿論 $\operatorname{im} f = \overline{\operatorname{im} f}$，よって $\overline{\operatorname{im} f}$ が求まったことになる．

念のためこの場合について (1.3) の実現を計算しておこう．$\overline{\operatorname{im} f}$ に基底 $\{\sin t, \cos t\}$ をとることにより F，G H を計算する：

$$F\gamma := (d/dt)\gamma = (x_1 \sin t + x_2 \cos t)'$$
$$= -x_2 \sin t + x_1 \cos t;$$
$$G = \sin t = [\sin t \ \ \cos t]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};$$
$$H\gamma = \gamma(0) = x_1 \sin t + x_2 \cos t\big|_{t=0}$$
$$= x_2 = (0,\ 1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

従って

$$F = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix},\quad G = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad H = [0,\ 1]$$

を得る．　この系の伝達関数 $H(sI-F)^{-1}G = 1/(s^2+1)$ となっていることを確かめられたい．

さて、(2.4) のカッコ内の式 $(d^2/dt^2+1)\gamma \equiv 0$ に注目しよう．　微分作用素 d^2/dt^2+1 は s^2+1 のラプラス逆変換であることは周知のとおりである．　ところが，$\sin t$ のラプラス変換は

(2.5)　$\mathcal{L}[\sin t] = 1/(s^2+1)$

であり、s^2+1 はこの分母になっている．　従って、インパルス応答Aのラプラス変換が有理関数にならない場合でもそれが分母，分子に分解されていれば，何らかの意味で (2.4) のような表現が可能になるのではないかという予想が立つ．　それが次節以降の内容である．［なお、(2.4) が伝達関数の分子に依存しないのは (2.5) の右辺の分母と分子が既約なためである．］

§3．擬有理的なインパルス応答

$\mathcal{L}[A]$ が有理関数になる場合の拡張として、擬有理的 (pseudo rational) というクラスを導入する．　まず，何故そのようなクラスを考えるに致ったかを説明しておこう．

$\overline{\mathrm{im}\, f_A}$ が有限次元でない場合、数学的に最も直接的な拡張はそれが Hilbert 空間，あるいは Banach 空間と同型にな

る場合をしらべることであろう．[実はこの2つの場合は一致するのであるが．] そのための十分条件（実は必要条件に可成り近いが、本当に必要かどうかはわかっていない）を与えるのが，A が pseudo rational という条件なのである．

まず若干の記号を用意しよう．

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$:= $\mathbb{R}$ 上で定義され、コンパクトな台を持つ C^∞ 関数の全体．

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$:= $\mathbb{R}$ 上で定義された C^∞ 関数で $[0,\infty)$ に含まれるコンパクトな台を持つものの全体．

$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:= $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ の双対空間，すなわち $\mathbb{R}$ 上の distributions の全体．

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$:= $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ の双対空間；$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元で $[0,\infty)$ に台を持つもの全体ではないことに注意．

$\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$:= $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元で台が左に有界なもの全体．

$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^-)$:= $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元で $(-\infty, 0]$ に含まれるコンパクトな台を持つもの全体．

さて $j: \mathcal{D}(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$ を自然な inclusion とする．$\pi: \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ をその双対写像とする．$\langle\ ,\ \rangle$ によって pairing を表わせば、π の定義は

(3.1) $\langle \pi\xi, \varphi \rangle := \langle \xi, j\varphi \rangle$, $\xi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$

となる．　$\xi\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ が函数ならば明らかに $\pi\xi=\xi|_{[0,\infty)}$ である．　π に関する基本的な補題を挙げておこう．

(3.2) 補題．$\pi\xi=0 \Leftrightarrow \operatorname{supp}\xi\subset(-\infty,0]$．

証明は定義より明らかである．

さて $\alpha\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^-)$，$\beta\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ とする．　必ずしも $\beta\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ とは見なせないので、合成積 $\alpha*\beta$ は定義できるとは限らない．　しかし次のようにすれば $\pi(\alpha*\beta)$ はうまく定義できる：　まず π が全射であることに注意する（inclusion $j:\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)\to\mathcal{D}(\mathbb{R})$ が $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ の中への同型であるから）．従って $\pi\bar{\beta}=\beta$ なる $\bar{\beta}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ がとれる．ここで

$$(3.3)\qquad \pi(\alpha*\beta):=\pi(\alpha*\bar{\beta})$$

と定義すると $\pi(\alpha*\beta)$ の意味は確定する．　実際，$\pi\bar{\beta}_1=\pi\bar{\beta}_2=\beta$ なら，補題 (3.2) より

$$\pi(\alpha*(\bar{\beta}_1-\bar{\beta}_2))=0 \qquad \Big(\operatorname{supp}(\beta_1-\beta_2)\underset{\text{に注意}}{\subset(-\infty,0]}\Big)$$

が従がうからである．

さて擬有理的なインパルス応答の定義を与えよう．

(3.4) 定義．　インパルス応答 A が<u>擬有理的</u>(<u>pseudo rational</u>) であるとは、次の条件を満す $\alpha,\beta\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^-)$ が存在して $A=\beta^{-1}*\alpha$ となることである．

(i) 合成積に関する β の逆元 β^{-1} が $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ の中に存在する．

(ii) $\mathrm{ord}\,\beta^{-1} = -\mathrm{ord}\,\beta$.

ただし $\mathrm{ord}\,\beta$ は β の位数(order)を表わす.([7]参照.)

次の定理は一般に微分差分方程式で表わされる系の入出力関係が pseudo rational であることを示す. まず δ_a を $a \in \mathbb{R}$ に点質量1を持つDiracのデルタとし,δ_0 を特に δ で表わす. 又 $\delta^{(n)}$ はその n 階微分を表わす. δ' の n コの合成積が $\delta^{(n)}$ である. $\mathbb{R}[\delta', \delta_{a_1}, \cdots, \delta_{a_r}]$ は δ', $\delta_{a_1}, \cdots, \delta_{a_r}$ で生成される $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の部分環($\mathbb{R}$-algebraでもある)を表わす(積は無論合成積の意味でとる). $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ ならばこれは多項式環 $\mathbb{R}[z_1, \cdots, z_{r+1}]$ に同型である. 次の定理が成り立つ.

(3.5) 定理([4],[10]). インパルス応答 A に対し、ある $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[\delta', \delta_{a_1}, \cdots, \delta_{a_r}]$ $(a_i < 0)$ が存在して、$A = \beta^{-1} * \alpha$ となるとする. このときAは pseudo rational である.

(3.6) 注意. より正確に言うならば、任意の0でない $\beta \in \mathbb{R}[\delta', \delta_{a_1}, \cdots, \delta_{a_r}]$ は $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ の中に逆元を有し,しかも $\mathrm{ord}\,\beta^{-1} = \quad \mathrm{ord}\,\beta$ が常に成り立つということである.

証明は略する. 上記の文献を参照されたい.

(3.4)で定義された A を pseudo rational と呼んだのは

次の理由による. Aのラプラス変換 $\mathcal{L}[A]$ を見れば,
$A=\beta^{-1}*\alpha$ により

$$\mathcal{L}[A]=\mathcal{L}[\alpha]/\mathcal{L}[\beta]$$

となっており、しかも $\mathrm{supp}\,\alpha$, $\mathrm{supp}\,\beta$ はコンパクトだから Paley−Wiener の定理により $\mathcal{L}[\alpha]$, $\mathcal{L}[\beta]$ は整関数になっている. 特に $\mathcal{L}[\alpha]$, $\mathcal{L}[\beta]$ が多項式のとき $\mathcal{L}[A]$ を rational と呼ぶわけだから, この場合 A を pseudo rational と呼ぶことにしたわけである.

§4. $\overline{\mathrm{im}\, f_A}$ の表現

まず次の定義から始めよう.

(4.1) 定義. $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^-)$ の2元 α, β が互いに素 (coprime) であるとは、ある distributions ξ, $\eta\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^-)$ が存在して

(4.2) $$\alpha*\xi+\beta*\eta=\delta$$

となることである.

上の定義はわかりづらいと思われるので説明をつけ加える. まず数学的には、(4.2)は合成積の環 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^-)$ に於て、α, β で生成されるイデアル $\alpha*\mathcal{E}'+\beta*\mathcal{E}'$ が $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^-)$ 全体と一致することを示している. 従ってこれは純代数的な条件であり, 位相的なものは介在していない. また, α, β

が δ' の多項式になっており，ξ, η も同様であれば、上記の条件は単に多項式環 $\mathbb{R}[\delta']$ に於て互いに素という条件を書き表わしたものに他ならない。この意味で (4.2) は古典的な場合の拡張になっており、従って (4.2) を満す α, β を互いに素と呼んでもよいであろう．

さて、α, β が互いに素ならば

$$L[\alpha]L[\xi] + L[\beta]L[\eta] = 1$$

なので、$L[\alpha]$ と $L[\beta]$ は共通零点を持たないことがわかる．もし全て S の多項式なら共通零点がなければ互いに素であると言えるのは明らかだが、一般にこの逆が成立するかどうかは疑問である．

さて次の集合を考える．$\beta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^-)$ は定義3.4の条件 (i), (ii) を満すとする．

$$(4.3) \qquad X^\beta := \{\gamma \in \Gamma : \pi(\beta * \gamma) = 0\}$$

ただし $(-\infty, 0]$ 上では $\gamma \equiv 0$ と見なす．$\beta * \gamma$ はともかく distribution ではある．$\pi(\beta * \gamma) = 0$ は従って $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ の元として 0 であることを表わす．$\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ で合成積は半連続 (separately continuous) であり（[7] 才6章参照，実は hypocontinuous にもなっている），しかも $L^2_{loc}[0, \infty)$ の位相は $\mathcal{D}'$ のそれより強い．従って π の連続性より、X^β が Γ の閉部分空間であることがわかる．

次の定理を証明しよう.

(4.4) 定理. インパルス応答 A が pseudo rational で, $A = \beta^{-1} * \alpha$ と分解されるとする. このとき

$$\overline{\mathrm{im}\, f_A} \subseteq X^{\beta}.$$

又, α, β が互いに素ならば等号が成立する.

証明. X^{β} が閉集合であるから, $\mathrm{im}\, f_A \subseteq X^{\beta}$ を示せばよい. Ω の任意の元 ω をとる, そうすれば

$$\begin{aligned}\pi(\beta * f_A(\omega)) &= \pi(\beta * \pi(\beta^{-1} * \alpha * \omega)) \\ &= \pi(\beta * \beta^{-1} * \alpha * \omega) \quad (\text{補題 3.2 の後の注意より}) \\ &= \pi(\alpha * \omega) = 0. \quad (\text{補題 3.2 より})\end{aligned}$$

ここで $f_A(\omega) = \pi(A * \omega) = \pi(\beta^{-1} * \alpha * \omega)$ を使った. よって $f_A(\omega) \in X^{\beta}$ が従がう.

さて α, β が互いに素とする. まず $\gamma \in X^{\beta} \cap C^{\infty}[0, \infty)$ とする. γ の $(-\infty, \infty)$ への拡張 $\hat{\gamma}$ を (i) $\hat{\gamma} \in C^{\infty}(-\infty, \infty)$ (ii) $\mathrm{supp}\, \hat{\gamma}$ は左に有界, となるようにとろう. $\alpha * \xi + \beta * \eta = \delta$ に注意すると

$$\begin{aligned}(4.5) \quad \gamma &= \pi \hat{\gamma} = \pi(\delta * \hat{\gamma}) \\ &= \pi((\alpha * \xi + \beta * \eta) * \hat{\gamma}) \\ &= \pi(\alpha * \xi * \hat{\gamma}) + \pi(\beta * \eta * \hat{\gamma}) \\ &= \pi(\alpha * \xi * \hat{\gamma}) + \pi(\eta * \pi(\beta * \hat{\gamma})) \\ &= \pi(\alpha * \xi * \hat{\gamma}).\end{aligned}$$

ここで $\omega := \beta * \xi * \hat{\gamma}$ とおくと

$$\pi\omega = \pi(\xi * \beta * \hat{\gamma}) = \pi(\xi * \pi(\beta * \pi\hat{\gamma})) = 0.$$

また ω の台は明らかに左に有界であるから、結局 ω は $(-\infty, 0]$ にコンパクトな台を持つことになる。 また $\hat{\gamma}$ が C^∞ なので ω も C^∞ である。 従って $\omega \in \Omega$. (4.5)式より $\gamma = \pi(\underline{\alpha * \beta^{-1}} * \omega) = f_A(\omega)$ となることは明らか。よって $\gamma \in \overline{\mathrm{im}\, f_A}$.

$\Sigma^\beta \cap C^\infty[0, \infty)$ が Σ^β で dense であることを示せば証明が終わる。 次の条件を満す molifier ρ_ε をとる：

(i) $\mathrm{supp}\,\rho_\varepsilon$ はコンパクトかつ $(-\infty, 0]$ に含まれる；

(ii) $\rho_\varepsilon \in C^\infty(-\infty, \infty)$；

(iii) $\rho_\varepsilon \to \delta$ as $\varepsilon \to 0$.

Σ^β の任意の元 γ をとり, $\gamma_\varepsilon := \pi(\rho_\varepsilon * \gamma)$ とおく。 このとき $\gamma_\varepsilon \to \gamma$ （Γ において）と $\gamma_\varepsilon \in C^\infty[0, \infty)$ は明らかであろう。 ところで

$$\begin{aligned}\pi(\beta * \gamma_\varepsilon) &= \pi(\beta * \pi(\rho_\varepsilon * \gamma)) = \pi(\rho_\varepsilon * \beta * \gamma) \\ &= \pi(\rho_\varepsilon * \pi(\beta * \gamma)) \quad (\mathrm{supp}\,\rho_\varepsilon \subset (-\infty, 0]) \\ &= 0\end{aligned}$$

より $\gamma_\varepsilon \in \Sigma^\beta$. 従って $\Sigma^\beta \cap C^\infty[0, \infty)$ は Σ^β で dense。これより $\Sigma^\beta = \overline{\Sigma^\beta \cap C^\infty[0, \infty)} \subseteq \overline{\mathrm{im}\, f_A}$. よって，証明が終わる。 ∎

§5. 微分差分方程式系への応用

次のインパルス応答 $A(t)$ が与えられたとする。

(5.1) $$A(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} (t-i-1)^i / i!, & n \le t < n+1. \end{cases}$$

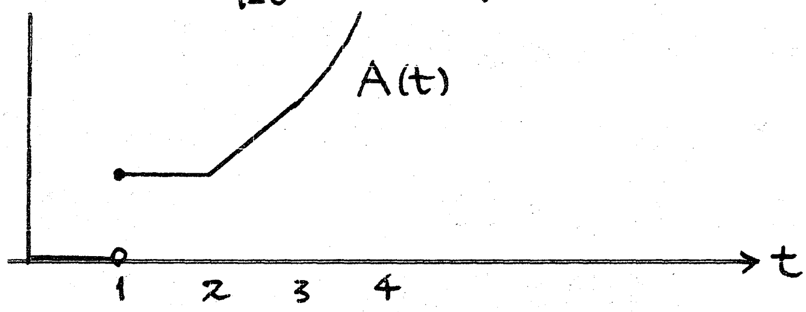

Fig. 2.

$L[A]$ を計算すると、$L[A](s) = 1/(se^s - 1)$. 言いかえれば $A = (\delta'_{-1} - \delta) * \delta$ である。これが pseudo rational であることは既にわかっている（定理 3.5）ので、定理 4.4 が使える。しかも $\beta := (\delta'_{-1} - \delta)$ と $\alpha := \delta$ とは明らかに互いに素であるから、$\overline{\mathrm{im}\, f_A} \cong X^\beta$. さて、$\pi(\beta * \gamma) = 0$ を滑らかな γ に適用すれば

(5.2) $$\gamma'(t+1) - \gamma(t) = 0 \qquad \forall t \ge 0$$

を得る。これを解いて

(5.3) $$\gamma(t) = \gamma(1) + \int_1^t \gamma(\tau - 1)\, d\tau, \quad 1 \le t \le 2.$$

従って $\gamma|_{[1,2]}$ は $\gamma|_{[0,1)}$ と $\gamma(1)$ によって完全に決定される。また (5.3) と同様の式を繰り返し用いることにより、$\gamma|_{[0,1)}$ と $\gamma(1)$ は γ の値を一意的に決定することがわかる。しかも $\gamma|_{[0,1)}$ と $\gamma(1)$ は (5.2) に矛盾することなく自由に

選べる. 以上を考慮して、このような γ 全体の閉包をし Γ で) とると $\overline{\mathrm{im}\, f_A} \cong L^2[0,1] \times \mathbb{R}$ を得る. これは微分差分方程式論で M_2-空間と呼ばれているものに他ならない([2]). 状態空間が求まったので、(1.3) の微分方程式表示を計算しよう. 自由状態遷移の生成作用素 F は微分作用素である. いま $L^2[0,1] \times \mathbb{R}$ の元 (z, x) を左に ε だけシフトし, (z, x) を引いて ε で割り, $\varepsilon \to 0$ の極限をとると F が得られる. この極限が存在するためには $z \in W_2^1[0,1]$ かつ $z(1) = x$ が必要かつ十分であり, 従って

(5.4) $\quad D(F) = \{(z, x) ; z \in W_2^1[0,1],\ z(1) = x\}.$

上記の計算を (5.3) に注意して実行すると $F(z, x) = (\frac{\partial}{\partial\theta} z, z(0))$ を得る. また (5.1) より $A|_{[0,1)} = 0$, $A(1) = 1$ であるから $G = A = (0, 1)$. $H\gamma = \gamma(0)$ なる H の定義より $H(z, x) = z(0)$.

$$\gamma|_{[0,1]}(\theta) = z(\theta)$$
$$\gamma(1) = x$$

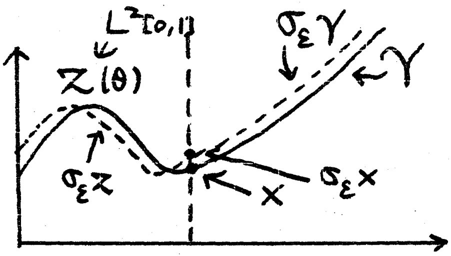

Fig. 3.

以上をまとめて次の正準実現を得る.

(5.5) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_t(\theta) \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta} z_t(\theta) \\ z_t(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = z_t(0), \qquad (z_t(\cdot), x) \in L^2[0,1] \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

これは微分差分方程式系

(5.6) $\dot{x}(t)=x(t-1)+u(t)$, $y(t)=x(t-1)$

に対するM_2モデルそのものである([2][5]).

同様の計算は多入力多出力系についても行えるが、ここでは割愛する. いずれ別の機会に公表する積りである.

なお、上記の計算で(5.5)を導く手法は(5.6)から出発して(5.5)をアプリオリにモデルと仮定する立場とは全く異なることに注意されたい. 後者の立場では(5.5)はアプリオリに仮定された出発点でしかないが、我々の立場では(5.5)は1〜4節に示された標準的構成法の帰結なのである. 特に(5.5)が正準的(canonical)であることが構成法より自明に保証されている. (これはもう一つの立場では計算で確かめねばならぬことであり, しかもそれは一般に必ずしも自明の手続きではない.)

§6. 近似実現に関する示唆.

$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^-)$の元$\beta$に対し

(6.1) $\ell(\beta):=\inf\{t\in \mathrm{supp}\,\beta\}$

と定義する. いまβが定義3.4の条件(i)(ii)を満すとすると、任意の$T>-\ell(\beta)$についてX^βは$L^2[0,T]$の閉部分空間と同型であることが知られている([H]). もう

少し正確に述べれば、$\mathfrak{X}^{\beta}$ の $[0,T]$ への制限 $\mathfrak{X}^{\beta}|_{[0,T]}$ が $\mathfrak{X}^{\beta}$ と同型（等距離的ではないが、一様同相）である。前者は $L^2[0,T]$ の閉部分空間になるので、それ自身ヒルベルト空間であり，とり扱い易い。例えば区間 $[0,T]$ を n 等分し、それに対応して $L^2[0,T]$ の元を階段関数で近似することができる。こうして得られる階段関数の全体は n 次元ベクトル空間であり、これを $\mathfrak{X}^{\beta}$ に制限すれば有限次元近似システムが得られるものと想像される。

しかしながら今のところこれを直接に実行するのは困難なので、替わりにインパルス応答 A を離散化して近似実現を求めることも試みよう。

5節の例について考察してみよう。(5.1) で与えられた $A(t)$ を $h=1/n$ の時間巾で離散化すると

$$
\begin{aligned}
&a_i = 0 \ , && i=1,\cdots,n-1, \\
(6.1)\qquad &a_i = 1 \ , && i=n,\cdots,2n-1, \\
&a_i = 1+(i-2n+1)h \ , && i=2n,\cdots,3n-1,
\end{aligned}
$$

等を得る。さて $A=(\delta_{-1}'-\delta)^{-1}*\delta$ であり $\ell(\delta_{-1}'-\delta)=1$ であることに注意しよう。既に述べたことにより、A の正準実現の状態空間 $\mathfrak{X}_A\ (=\mathfrak{X}^{\beta})$ は $L^2[0,1+\varepsilon]$ ($\varepsilon>0$ は任意）の閉部分空間に同型である。従って $\mathfrak{X}_A$ を計算するには $A*\omega|_{[0,1+\varepsilon]}$, $\omega\in L^2[-1-\varepsilon,0]$ の全体を

計算すればよい． これにはAのデータは $[0, 2+2\varepsilon]$ 上でのみわかっていればよい． 離散化したAに同様の考えを適用すれば，a_i は $i=2n$ または $i=2n+1$ ぐらいまでわかっていれば十分であろうと推測がつく． しかも状態空間は $L^2[0, 1+\varepsilon]$ の部分空間なのだから（$\varepsilon = 1/n$ と仮定して）サイズ n のハンケル行列 H_n を用いて実現すればよいと見当がつく． 実際，

(6.2) $$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

であり $\operatorname{rank} H_n = n$． H_n の第 i 列ベクトルを v_i とすれば，実現すべき（正準）システムの自由状態遷移 F は

(6.3) $$F : v_1 \mapsto v_2,\ v_2 \mapsto v_3,\ \cdots,\ v_{n-1} \mapsto v_n,\ v_n \mapsto v_{n+1},$$

によって決定される． ただし v_{n+1} は v_n の次に来るべき列ベクトル $(a_{n+1}, \cdots, a_{2n})' = (1, \cdots, 1, 1+h)'$ である． $\{v_1, \cdots, v_n\}$ が一次独立であるから上記の F は well-defined であり，$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を基底にとることにより

(6.4) $$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h \\ 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と行列表現される． また $G = (a_1, \cdots, a_n)' = v_1$ であることも連続時間系に於て $G = A$ と定義することより容易に想

像されるであろう（詳しくは有限次元系の実現理論，例えば[3]を参照されたい）。なお、Hの形は複雑なので省略する。　(6.4)式のままでも離散近似になっているが、(5.5)式との関係を見るために基底を自然基底$\{e_1,\cdots,e_n\}$に変換する。そうすると

(6.5)
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}(t+h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ddots & 0 \\ & 0 & \ddots & 1 \\ h & 0 & \cdots & 0 \; 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

を得る。　いま $\dot{x}(t) \sim \frac{1}{h}(x(t+h)-x(t))$ として(6.5)を微分方程式系に直すと

(6.6)
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

を得る。　ここで$(x_1,\cdots,x_{n-1})$は(5.5)における$z_t(\theta)$を離散近似したものに対応し，特にx_1は$z_t(0)$にあたる。またx_nは(5.5)のx_tに対応している。従って(6.6)の右辺の行列の第(n,1)要素は$z_t(0)$のフィードバック量に相当するものである。また$\frac{1}{h}(x_i-x_{i-1})$は(5.5)の$\frac{\partial}{\partial\theta}z_t(\theta)$に対応していることも明らかであろう。

面白いことに(6.5)は(5.5)式のaveraging approximation ([1]) として既に知られているものと全く同一である。これが(5.5)式を介さずにインパルス応答の離散化(6.1)から直接に求まることも興味深い。（なお、(6.5)式は微分差

分方程式系の最適制御問題等に有効に利用されている([1]参照)).

筆者らはこの手法を用いていくつかの数値例につき実現を試みたが、結果はおおむね良好であった([6]). 微分差分方程式系に対しては十分有効と思われる.

7. おわりに

擬有理的なインパルス応答の実現については以上の他にも興味ある性質が色々とわかってきている. 無限次元の実現理論では一番稔りの多いクラスなのではないかというのが今の実感である.

REFERENCES

[1] BURNS, J. A. and E. M. CLIFF, "Methods for approximating solutions to linear hereditary quadratic optimal control problems," IEEE Trans. Autom. Contr., AC-23 (1978): 21-36.

[2] DELFOUR, M. C. and S. K. MITTER, "Hereditary differential systems with constant delays. I. General case," J. Diff. Equ., 12 (1972): 213-235.

[3] KALMAN, R. E., P. L. FALB, and M. A. ARBIB, Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill (1969), New York.

[4] KAMEN, E. W., "On an algebraic theory of systems defined by convolution operators," Math. Systems Theory, 9 (1975): 57-74.

[5] MANITIUS, A. and R. TRIGGIANI, " Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions," SIAM J. Control & Optimiz., 16 (1978): 599-645.

[6] 森下 "微分差分方程式系の実現問題" 京大工学部 数理工学科 修士論文 (1983).

[7] SCHWARTZ, L., Theorie des Distributions, Hermann (1966), Paris.

[8] YAMAMOTO, Y., "Realization theory of infinite-dimensional linear systems, I," Math. Systems Theory, 15 (1981): 55-77.

[9] YAMAMOTO, Y., "Realization theory of infinite-dimensional linear systems, II," Math. Systems Theory, 15 (1982): 169-190.

[10] YAMAMOTO, Y.,"Algebraic sufficient conditions for bounded-type linear input/output maps," Proc. 21st IEEE Conf. on Decision & Contr. (1982): 414-419.

[11] YAMAMOTO, Y., " Sufficient conditions for bounded-type linear input/output maps and their applications to realization theory," submitted for publication.